S1-1
Japanese (Japan)

ゼロ長ばねとスリンキーコイル - 解答

Part A: 静力学 (3.0 points)

A.1 $F \le kL_0$ のとき、ばねの全長は変わらないので，$\Delta y = \Delta\ell$．$F > kL_0$ のとき、ばねの全長は F/k に変化する．ばねの伸びは一様であるから，

$$\frac{\Delta y}{\Delta\ell} = \frac{F/k}{L_0} \Rightarrow \Delta y = \frac{F}{kL_0}\Delta\ell. \tag{1}$$

A.1	0.5pts
$\Delta y = \frac{F}{kL_0}\Delta\ell\ (F > kL_0), \Delta\ell\ (F \le kL_0).$	

A.2 前問より $F = k\frac{L_0}{\Delta\ell}\Delta y$. よって任意の長さ $\Delta\ell$ のばねの一部は，ばね定数

$$k' = k\frac{L_0}{\Delta\ell} \tag{2}$$

の ZLS とみなすことができる．よって，

$$\Delta W = \frac{1}{2}k'(\Delta y^2 - \Delta\ell^2) = \frac{kL_0}{2\Delta\ell}(\Delta y^2 - \Delta\ell^2). \tag{3}$$

A.2	0.5pts
$\Delta W = \frac{kL_0}{2\Delta\ell}(\Delta y^2 - \Delta\ell^2).$	

A.3 伸びていない状態のばねにおいて下端から ℓ から $\ell + d\ell$ の位置にあったばねの微小部分にかかる力の釣り合いを考える．この部分より下にあるばねによる重力の大きさは $\frac{\ell}{L_0}Mg$. これがばねの張力と等しいとき釣り合う．
この重力が，ばねを伸ばすのに必要な最小の力 kL_0 に満たないような ℓ では，微小部分は伸びない．このような ℓ の最大値を ℓ_0 とおくと，

$$\frac{\ell_0}{L_0}Mg = kL_0 \Rightarrow \ell_0 = \frac{kL_0^2}{Mg} = \alpha L_0. \tag{4}$$

$\ell > \alpha L_0$ において，微小部分が伸びて平衡状態になった後の長さを dy とおくと

$$dy = \frac{\frac{\ell}{L_0}Mg}{kL_0}d\ell = \frac{\ell}{\alpha L_0}d\ell. \tag{5}$$

よって，

$$H = \alpha L_0 + \int_{\alpha L_0}^{L_0} \frac{\ell}{\alpha L_0}d\ell = \alpha L_0 + \frac{L_0^2 - (\alpha L_0)^2}{2\alpha L_0} = \frac{L_0}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) \tag{6}$$

A.3	2.5pts
$H = \frac{L_0}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right).$	

Part B: 動力学 (5.5 points)

B.1 問題 B.2 の記法を用いる．ばねの part I が受ける力は，自重 $\frac{L_0-\ell}{L_0}Mg$ と，part II から受けるばねの張力 (境界の少し下では A3 の釣り合いが成立しているため，これは part II のばねの重さに等しい) $\frac{\ell}{L_0}Mg$ の和であるから，ℓ によらず Mg である．part II は静止しているから重力と張力の和は 0．よって，ばね全体の重心の運動方程式を考えると，ばねの重心は等加速度 g で落下していることがわかる．

ばねが手放された瞬間のばねの重心の下端からの距離を H_{cm} とおく．伸びる前に下端から ℓ にあったばねの微小部分の，伸びて平衡状態にある時の下端からの距離を $H(\ell)$ とおくと，A.3 より

$$H(\ell) = \ell_0 + \frac{\ell^2-\ell_0^2}{2\ell_0} = \frac{\ell^2}{2\ell_0} + \frac{\ell_0}{2}\ (\ell > \ell_0),\ \ell\ (\ell < \ell_0) \tag{7}$$

よって，

$$H_{cm} = \frac{1}{M}\int_0^{L_0} H(\ell)M\frac{d\ell}{L_0} \tag{8}$$

$$= \int_0^{\ell_0}\frac{\ell}{L_0}d\ell + \int_{\ell_0}^{L_0}\frac{1}{L_0}\left(\frac{\ell^2}{2\ell_0}+\frac{\ell_0}{2}\right)d\ell \tag{9}$$

$$= \frac{\ell_0^2}{2L_0} + \frac{1}{L_0}\left[\frac{L_0^3-\ell_0^3}{6\ell_0} + \frac{\ell_0}{2}(L_0-\ell_0)\right] \tag{10}$$

$$= L_0\left(\frac{1}{6\alpha}+\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha^2}{6}\right). \tag{11}$$

ばねが縮み切ったとき，ばねの重心は下端から $L_0/2$ の位置にある．よって，

$$\frac{1}{2}gt_c^2 = H_{cm} - \frac{L_0}{2} = L_0\left(\frac{1}{6\alpha}-\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha^2}{6}\right) = \frac{L_0}{6\alpha}(1-\alpha)^3 \Rightarrow t_c = \sqrt{\frac{L_0}{3g\alpha}(1-\alpha)^3}. \tag{12}$$

$k = 1.02\ \mathrm{N/m}, L_0 = 0.055\ \mathrm{m}, M = 0.201\ \mathrm{kg}, g = 9.80\ \mathrm{m/s^2}$ を代入すると，$\alpha = 0.0285$, よって $t_c = 0.245\ \mathrm{s}$．

B.1 2.5pts

$$t_c = \sqrt{\frac{L_0}{3g\alpha}(1-\alpha)^3} = 0.245\ \mathrm{s}$$

B.2 この瞬間の境界の位置は下端から $H(\ell) = \frac{\ell^2}{2\ell_0}+\frac{\ell_0}{2}$. この点より上にあるばねの一部の，重心の下端からの距離が，手放される前 H_1 であり，問題で考えている瞬間 H_2 であるとおく．

ばねの運動している部分は常に一定の力 Mg を受けて運動している．よって落下が始まってからこの瞬間までに重力がばねにした仕事は $Mg(H_1-H_2)$．これが Part I の運動エネルギー $\frac{1}{2}(M-m(\ell))v_I(\ell)^2$ に等しい．よって，

$$H_1 = \frac{1}{M-m(\ell)}\int_l^{L_0} H(\ell')M\frac{d\ell'}{L_0} = \frac{1}{L_0-\ell}\int_\ell^{L_0}\left(\frac{\ell'^2}{2\ell_0}+\frac{\ell_0}{2}\right)d\ell' = \frac{L_0^2+L_0\ell+\ell^2}{6\ell_0}+\frac{\ell_0}{2}. \tag{13}$$

$$H_2 = H(\ell) + \frac{L_0-\ell}{2} = \frac{\ell^2}{2\ell_0}+\frac{\ell_0}{2}+\frac{L_0-\ell}{2}. \tag{14}$$

以上より，

$$\frac{1}{2}M\frac{L_0-\ell}{L_0}v_I(\ell)^2 = Mg(H_1-H_2) \tag{15}$$

$$= Mg\left(\frac{L_0^2+L_0\ell-2\ell^2}{6\ell_0}-\frac{L_0-\ell}{2}\right) \tag{16}$$

$$= Mg\frac{(L_0-\ell)(L_0-3\ell_0+2\ell)}{6\ell_0} \tag{17}$$

$$\Rightarrow v_I(\ell)^2 = g\frac{L_0(L_0-3\ell_0+2\ell)}{3\ell_0} = \frac{2g}{3\alpha}\ell + \left(\frac{1}{3\alpha}-1\right)gL_0. \tag{18}$$

B.2 2.5pts

$$A = \frac{2g}{3\alpha}, B = \left(\frac{1}{3\alpha}-1\right)gL_0$$

次のことに注意しよう。$\ell = L_0$ で $v_{upper-f}^2 = L_0 g\frac{1-\alpha}{\alpha}$，$\ell = \ell_0 = \alpha L_0$ で $v_{upper-f}^2 = L_0 g\frac{1-\alpha}{3\alpha}$ であり，ばねが放されたときの速度は 0 でない: 収縮時間 t_c よりずっと短い時間でその速度になり，$\ell = \ell_0$ のときには $1/\sqrt{3}$ になる。

B.3 前問において $A > 0$ より，$v_I(\ell)$ は $\ell = \ell_0$ となり $v_I(\ell) = \sqrt{A\alpha L_0 + B}$ となるまで単調に減少する．$\ell = \ell_0$ となった瞬間，Part I は伸びていない状態で静止している長さ ℓ_0 の Part II と衝突，運動量保存則より速度はさらに減少する．衝突の後は剛体として落下するため，速度は増加する．よってばねの移動している部分の最小の速さは，衝突の直後に達成され，その値は，運動量保存則より

$$v_{min} = \frac{(M-m(\ell_0))v(\ell_0)}{M} = (1-\alpha)\sqrt{A\alpha L_0 + B}. \tag{19}$$

B.3 0.5pts

$$v_{min} = (1-\alpha)\sqrt{A\alpha L_0 + B}.$$

Part C: エネルギー論 (1.5 points)

C.1 問題 B.2 の議論より，ばねの位置エネルギーは完全に運動エネルギーに変換される．よって，エネルギーの損失 Q は，手放される前に蓄えられていたばねの弾性エネルギーに等しい．
問題 A.2 より，伸びていない状態のばねにおいて下端から ℓ から $\ell + d\ell$ の位置にあったばねの微小部分に蓄えられていた弾性エネルギーを dQ とおくと，A.3 で示したように $dy = \frac{\ell}{\ell_0}d\ell$ なので，

$$dQ = \frac{kL_0}{2}\left(\frac{\ell^2}{\ell_0^2}-1\right)d\ell. \tag{20}$$

よって，

$$Q = \int_{\ell_0}^{L_0}\frac{kL_0}{2}\left(\frac{\ell^2}{\ell_0^2}-1\right)d\ell \tag{21}$$

$$= \frac{kL_0}{2}\left(\frac{L_0^3-\ell_0^3}{3\ell_0^2}-(L_0-\ell_0)\right) \tag{22}$$

$$= \frac{\alpha MgL_0}{2}\left(\frac{1-\alpha^3}{3\alpha^2}-(1-\alpha)\right) \tag{23}$$

$$= MgL_0\frac{(1-\alpha)^2(2\alpha+1)}{6\alpha}. \tag{24}$$

C.1 1.5pts

$$Q = MgL_0\frac{(1-\alpha)^2(2\alpha+1)}{6\alpha}.$$